Équations

I - Définition et propriétés

<u>Définitions :</u>
Une équation est une égalité dans laquelle interviennent un ou plusieurs nombre(s) inconnu(s). Ceux-ci sont souvent désignés pas des lettres.

Résoudre une équation, c'est déterminer toutes les valeurs (appelées solutions) qui rendent l'égalité de l'équation vraie.

<u>Exemples :</u>
- L'équation $x+2=5$ possède une seule solution : x = 3
- L'équation $x\times 0=5$ ne possède pas de solution

<u>Remarque :</u> le degré d'une équation est égal à l'exposant le plus élevé affecté à une lettre.
Exemples : $3x^2-2x+5=0$ est une équation de degré 2

<u>Propriétés (vues en 4eme)</u>
On obtient une nouvelle équation qui a les mêmes solutions que l'équation initiale :
- Lorsque l'on ajoute (ou soustrait) un même nombre à chacun de ses membres.
- Lorsque l'on multiplie (ou divise) chacun de ses membres par un même nombre non nul.

II - Résoudre une équation du premier degré

$$\begin{array}{ccc} & x+4=6x-3 & \\ +3 & x+4+3=6x-3+3 & +3 \\ & x+7=6x & \\ -x & x+7-x=6x-x & -x \\ & 7=5x & \\ :5 & \frac{7}{5}=x & :5 \end{array}$$

1- On rassemble les termes constants dans un membre

2- On rassemble les termes en x, dans l'autre membre

3- On obtient la valeur de x

Vérification :

$$x+4=\frac{7}{5}+4=\frac{7}{5}+\frac{20}{5}=\frac{27}{5}$$

$$6x-3=6\times\frac{7}{5}-3=\frac{42}{5}-\frac{15}{5}=\frac{42-15}{5}=\frac{27}{5}$$

4- On vérifie que la solution fonctionne

L'équation admet pour solution $x=\frac{7}{5}$

5 – On conclut

III - Utiliser une équation pour résoudre un problème

Exemple: Amélie et Julien vendent du muguet le 1er mai et comptent l'argent qu'ils ont gagné. Amélie a gagné 15€ en pièces et le reste uniquement en billets de 10€. Julien, lui, a gagné 75€ en pièces et le reste en billets de 5€. Surprise : ils ont gagné la même somme et chacun a le même nombre de billets !
Combien Amélie a-t-elle de billets de 10€ ?

On choisit x le nombre de billets d'Amélie	1- On choisit l'inconnue (en général le nombre demandé dans la question)
Somme gagnée par Amélie : $15+10x$ Somme gagnée par Julien : $75+5x$ Les deux sommes sont égales, donc on a	2- Modélisation : on utilise les données du problème pour écrire l'équation
$15+10x=75+5x$ $10x=60+5x$ $5x=60$ $x=12$	3 - On résout l'équation
Vérification : $15+10x=15+10\times12=15+120=135$ $75+5x=75+5\times12=75+60=135$	4- Vérification du résultat, à partir des données du problème
Conclusion : Amélie et Julien ont 12 billets chacun, et ils ont gagné 135€	5 – On conclut

IV - Autres formes d'équations

1) Équations produit nul

Démonstration :

Prenons deux nombres x et y, tels que xy = 0.

1er cas : x = 0, on a donc xy = 0

2eme cas : x ≠ 0, comme xy = 0,

on a $\frac{xy}{x}=\frac{0}{x}$

donc y = 0

Bilan : si un produit est nul, alors au moins un des facteurs est nul

> Propriété : A et B sont deux nombres,
> Si un produit est nul alors l'un au moins de ses facteurs est nul.
> si $A\times B=0$ alors $A=0$ ou $B=0$

Exemple 1 : Résoudre l' équation $(3x-2)(2-x)=0$

Soit $3x-2=0$ ou $2-x=0$

$3x=2$; $x=2$

$x=\frac{2}{3}$

Les solutions de cette équation sont 2 et $\frac{2}{3}$.

1- On repère une équation de la forme $A\times B=0$ donc, soit A = 0 ou B = 0
2- On se retrouve avec deux équations « simples » à résoudre séparément

3- Conclusion

Remarque : autre façon de noter les solutions (lycée) :

L'ensemble des solution de cette équation est $\left\{2\ ;\frac{2}{3}\right\}$

Exemple 2 : Résoudre l' équation $2x^2=4x$

Remarque : on est coincé, le carré nous bloque, et on n'a pas la forme $A\times B=0$. Il va falloir transformer notre équation pour retrouver une forme connue.

$2x^2=4x$
$2x^2-4x=0$
$x(2x-4)=0$

1- On fait passer le $5x$ à gauche, on retrouve le « =0 », il manque le produit
2- On factorise par x , et on obtient la forme cherchée !!

Soit $x=0$ ou $2x-4=0$

$2x=4$
$x=2$

3- On résout les deux équations (l'une est évidente)

Les solutions de cette équation sont 0 et 2.

4- On conclut

2) Équation x² = a

Démonstration : a est un nombre strictement positif, on veut résoudre l'équation

$x^2=a$
$x^2-a=0$
$x^2-(\sqrt{a})^2=0$
$(x+\sqrt{a})(x-\sqrt{a})=0$

Cette équation possède donc deux solutions $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$

Propriété : On considère un nombre relatif a.
- Si a<0 alors l'équation x²=a n'a pas de solution.
- Si a=0 alors l'équation x²=a admet une seule solution 0.
- Si a>0 alors l'équation x²=a a deux solutions $\sqrt{a}$ .et $-\sqrt{a}$.

Exemples : Résoudre les équations suivantes : $x^2=12$; $x^2+20=0$ et $(x+5)^2=36$

a) $x^2=12$

12 est positif, donc cette équation a deux solutions $\sqrt{12}$ et $-\sqrt{12}$

12 est positif, on passe directement à la racine carrée, sans oublier la solution négative

b) $x^2+20=0$

$x^2=-20$

Cette équation n'a pas de solution car un carré est toujours positif

On transforme rapidement l'équation, et on obtient un nombre négatif => pas de solution

c) $(x+5)^2=36$

36 est un nombre positif donc $x+5=\sqrt{36}$ ou $x+5=-\sqrt{36}$

$x+5=6$ $\qquad$ $x+5=-6$

$x=1$ $\qquad$ $x=-11$

Cette équation possède donc deux solutions : 1 et -11

Exemple plus complexe

1- 36 est positif, on passe aux racine carrées, mais en face, ce n'est pas x , mais $x+5$

2- On obtient donc deux équations à résoudre

Que dois-je retenir ?

Connaissances	Je connais ma leçon	
Définition d'une équation et vocabulaire	Oui	Non
Différent formats d'équations à connaître : - premier degré : $ax+b=cx+d$ - équation produit : $A\times B=0$ - équation $x^2=a$	Oui	Non
Savoir-faire	**Je sais faire**	
Technique de résolution pour chaque type d'équation :		
- premier degré (flèches)	Oui	Non
- équations produits (deux équations)	Oui	Non
- $x^2=a$ (deux racines carrées)	Oui	Non
Modéliser un problème à l'aide d'une équation	Oui	Non