Fonctions affines – fonctions linéaires

I - Définition

Définition : On considère deux nombres a et b donnés.
Le processus qui à tout nombre x fait correspondre le nombre $ax+b$ s'appelle une fonction affine.

On note : $f : x \to ax+b$ ou $f(x)=ax+b$

Cas particuliers :

- Si a= 0, tous les nombres ont la même image b. On dit que c'est une fonction constante.
- Si b =0, $f(x)=ax$, on dit que c'est une fonction linéaire.

Exemples :

- f(x) = 5x – 3, c'est une fonction affine (a = 5 et b = -3)
- g(x) = -3x, c'est une fonction linéaire (a = -3 et b= 0)
- h(x) = -17, c'est une fonction constante (b = -17)

II - Représentation graphique

1) Droite et point

Propriétés : (admise)
La représentation graphique d'une fonction :
- affine est une droite.
- linéaire est une droite passant par l'origine du repère.
- constante est une droite parallèle à l'axe des abscisses

Rappel : L'ensemble des points de cette droite ont pour coordonnées

$(x ; f(x))$ soit $(x ; ax+b)$

Abscisse (Antécédent)

Ordonnée (Image)

2) Tracé de la représentation graphique

Méthode :

La représentation graphique d'une fonction affine étant une droite, il nous suffit de trouver deux points appartenant à cette droite. Pour cela, il faut :

- Choisir deux nombres différents (les valeurs de x, l'antécédent).

On peut choisir n'importe quelle valeur, mais il faut réfléchir un peu pour qu'ils rentrent dans le graphique : si vous prenez 1 000 000 000, vous risquez d'avoir des problèmes.

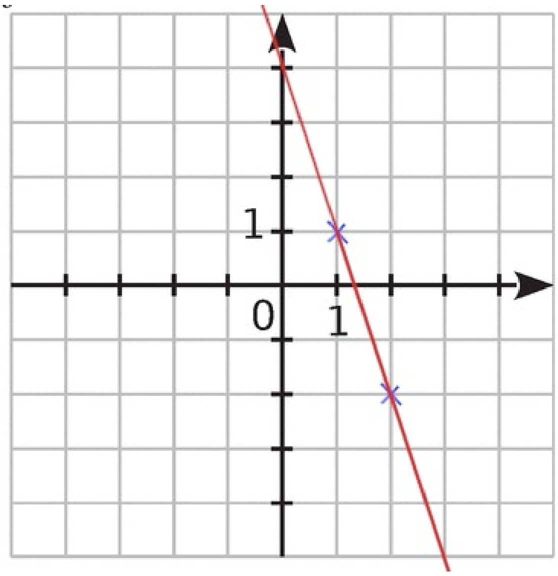
- Calculer leurs deux images
- Places les deux points correspondants
- Tracer la droite.

Exemple : Tracer la représentation graphique de la fonction $g(x)=-3x+4$.

C'est une fonction affine : une droite. Il nous faut donc deux points.

On prend $x=1$
$g(1)=-3\times1+4=1$ => point (1;1)

On prend $x=2$
$g(2)-3\times2+4=-6+4=-2$ => *point (2;-2)*

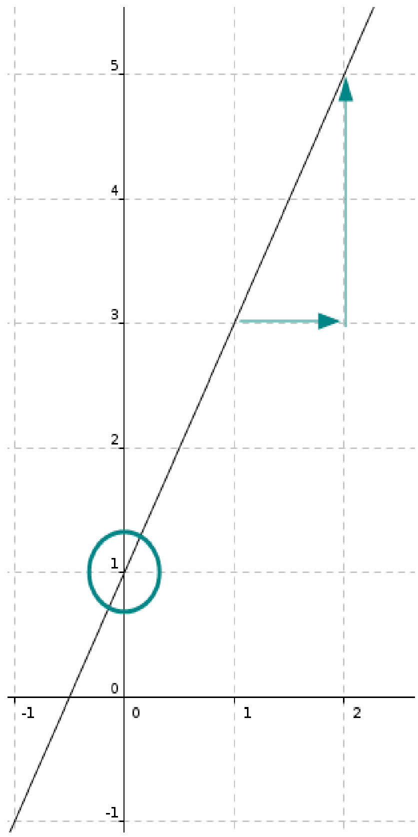


3) Déterminer la fonction à partir de la représentation graphique

Vocabulaire :
On considère la fonction affine f telle que : $f(x)=ax+b$
- a est le coefficient directeur de la droite. (il indique la direction de la droite)
- b est l'ordonnée à l'origine. (elle indique l'ordonnée du point d'intersection de la droite avec l'axe des ordonnées).

Remarque : le coefficient directeur indique la pente
- Si a > 0, la droite monte, on dit qu'elle est croissante
- Si a < 0, la droite descend, on dit qu'elle est décroissante
- Si a = 0, la droite est horizontale (fonction constante)

Exemple 1 : Voici la représentation graphique de la fonction f. Déterminer f.



C'est une droite, il s'agit donc d'une fonction affine : $f(x)=ax+b$

Déterminons les valeurs de a et b :
- b est l'ordonnée à l'origine : 1
- a est le coefficient directeur : 2

Conclusion : $f(x)=2x+1$

1- Repérage du type de fonction

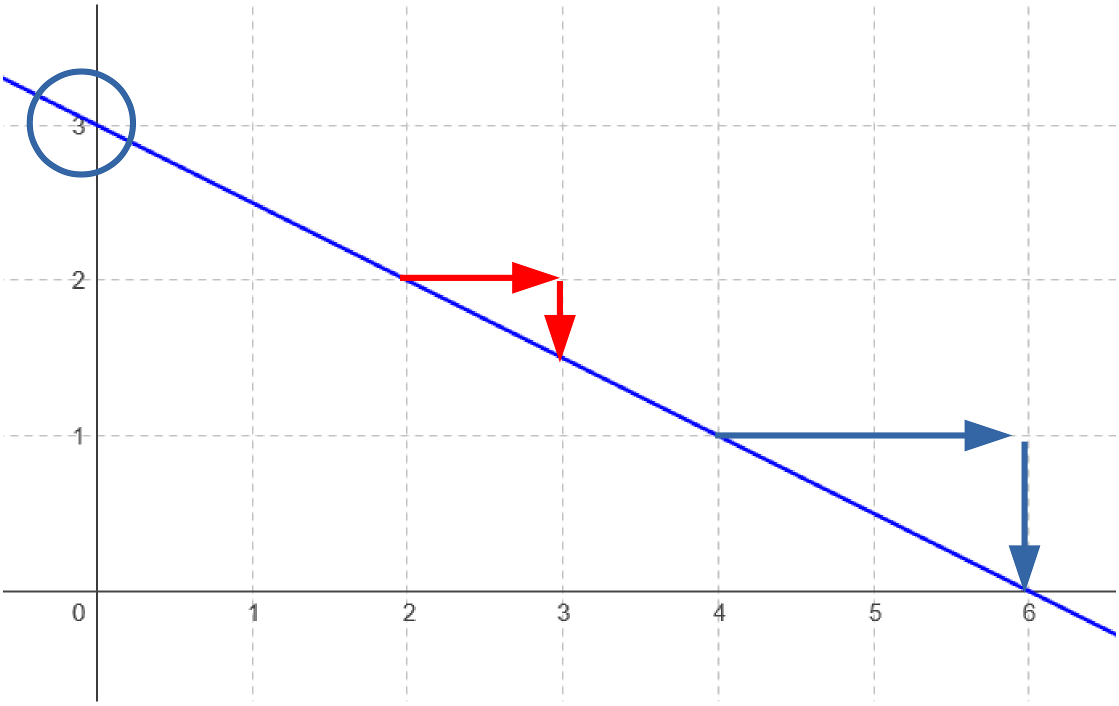
2- On commence par le par le plus simple : l'ordonnée à l'origine

3- Coefficient directeur :
- On choisit un point de la courbe
- On se déplace d'une unité vers la droite
- On compte de combien on doit monter (ou descendre) pour rejoindre la droite

4- On donne la forme complète de la fonction

Exemple 2 : coefficient fractionnaire

Voici la représentation graphique de la fonction g. Quelle est cette fonction ?



C'est une droite, il s'agit donc d'une fonction affine : $g(x)=ax+b$

Déterminons les valeurs de a et b :

- b est l'ordonnée à l'origine : 3
- a est le coefficient directeur : chaque fois que l'on augmente x de 1, g(x) diminue de $\frac{1}{2}=0,5$. Donc $a=-\frac{1}{2}$

Conclusion :

$g(x)=-\frac{1}{2}x+3$ ou $g(x)=-0,5x+3$

Pour la détermination de a, si on se déplace de 1, on ne tombe pas sur le quadrillage. On n'est pas certain du $\frac{1}{2}$.

Pour valider, il faut se déplacer de 2, et raisonner par proportionnalité (car la pente est la même partout) : 2 => 1

donc 1 => 0,5

Attention, signe négatif car la droite est décroissante.

Propriété (admise):

Deux droites qui ont le même coefficient directeur sont parallèles.

Les droites représentées par les fonctions $f(x)=ax+b$ et $g(x)=ax+c$ sont parallèles, quelles que soient les valeurs de a,de b et de c.

III - Pourcentages : augmentations et réductions

Exemple :
Un objet est vendu 90€, on veut appliquer une réduction de p %

Réduction : $90 \times \frac{p}{100}$ €

$$\begin{aligned} Prix\ final = prix\ initial - réduction &= 90 - 90 \times \frac{p}{100} \\ &= 90 \times 1 - 90 \times \frac{p}{100} \\ &= 90 \times \left(1 - \frac{p}{100}\right) \end{aligned}$$

Donc pour appliquer une réduction de p % à un nombre, on le multiplie par $1 + \frac{p}{100}$

Propriété :
Soit p, un nombre relatif

L'augmentation de p % peut être modélisé par la fonction linéaire : $f(x) = \left(1 + \frac{p}{100}\right) x$

La réduction de p % peut être modélisé par la fonction linéaire : $f(x) = \left(1 - \frac{p}{100}\right) x$

Exemple :

La taille d'un arbre augmente de 30 % environ tous les ans.
A 1 an, il mesure 2,4m. Quelle sera sa taille dans 2 ans ?

$$30\,\% = \frac{30}{100} = 0{,}30$$

Augmentation de 30 % : $1 + \frac{30}{100} = 1 + 0{,}30 = 1{,}30$

Il faut appliquer cette augmentation 2 fois (dans 2 ans)

Donc $2{,}4\,m \times 1{,}30 \times 1{,}30 = 4{,}056\,m$

Conclusion : dans 2 ans, l'arbre mesurera environ 4,056m

IV - Propriété des accroissements (niveau 2nde)

Démonstration :

On considère une fonction affine f telle que: $f(x)=ax+b$.

Soient x_1 et x_2 deux nombres quelconques, avec $x_1 \neq x_2$.

On a : $f(x_1)=a x_1+b$ et $f(x_1)=a x_2+b$.

D'où : $f(x_1)-f(x_2)=a x_1+b-(a x_2+b)$

$$=a x_1+b-a x_2-b$$
$$=a x_1-a x_2$$
$$=a(x_1-x_2)$$

Donc : $a=\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}$, si $x_1 \neq x_2$

1- On calcule les images de nos deux nombres

2- On calcule la différence des images

3- Les b disparaissent

4- On factorise par a

5- Il reste à diviser pour trouver la valeur de a

Remarque : si $x_1=x_2$, les différences sont égales à 0, la division est impossible ($\dfrac{0}{0}$), on élimine donc ce cas dès le début.

Propriété des accroissements:

Soit f la fonction affine définie par $f(x)=ax+b$.

Quels que soient les nombres distincts x_1 et x_2 ,

On a : $a=\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}$

Remarque : lorsque $x_2 - x_1 = 1$, on retrouve la méthode de détermination graphique du coefficient directeur (on se déplace de 1 vers la droite)

Exemple : Déterminer la fonction affine telle que $f(3)=9$ et $f(-2)=-1$

C'est une fonction affine, donc de la forme $f(x)=ax+b$

Recherche de a :

$$a=\frac{f(3)-f(-2)}{3-(-2)}=\frac{9-(-1)}{3-(-2)}=\frac{9+1}{3+2}=\frac{10}{5}=2$$

Recherche de b :

On sait que $f(x)=2x+b$ et que $f(3)=9$

Donc $f(3)=2\times3+b=9$

$$6+b=9$$
$$b=3$$

Conclusion :

$$f(x)=2x+3$$

1- Introduction : type de fonction

2- On applique la formule pour calculer a avec $x_1=3$ et $x_2=-1$

3- Pour trouver la valeur de b, on utilise une des deux données de l'énoncé.
On obtient une équation à résoudre (facile)

4- On conclut
Note : on peut vérifier que $f(-2)=-1$

Que dois-je retenir ?

Connaissances	Je connais ma leçon	
<u>Vocabulaire</u> : - fonctions affines, linéaires, constantes - coefficient directeur, ordonnée à l'origine	Oui	Non
Forme algébrique des fonctions affine : $f(x)=ax+b$	Oui	Non
Représentation graphique de ces fonctions	Oui	Non
Pourcentages : augmentations et réductions	Oui	Non
Savoir-faire	**Je sais faire**	
Identifier un type fonction à partir de : – sa forme algébrique – sa représentation graphique	Oui	Non
Tracer la représentation graphique de l'une de ces fonctions	Oui	Non
Déterminer une fonction à partir de sa représentation graphique	Oui	Non
Pourcentage d'augmentation/réduction : – Appliquer un pourcentage – Retrouver un pourcentage	Oui	Non