Nombres premiers

I - Multiples et diviseurs

1) Définition

Définition :
Un nombre a est un diviseur d'un nombre b, lorsque le reste de la division euclidienne de b par a est égal à 0.

On dit aussi que b est un multiple de a

Note : pour qu'un nombre soit un diviseur il faut que la « division tombe juste »

Exemples :
Les diviseurs de 30 sont :

1 ; 30	car	$1\times30=30$
2 ; 15	car	$2\times15=30$
3 ; 10	car	$3\times10=30$
5 ; 6	car	$5\times6=30$

2) Somme et diviseurs

Démonstration : on cherche à analyser la somme de deux nombres pairs.

Soient a et b deux nombres entiers pairs.
a est un multiple de 2, donc, il existe un nombre entier k tel que $a=2\times k$
a est un multiple de 2, donc, il existe un nombre entier j tel que $b=2\times j$

$a+b=2\times k+2\times j=2\times(k+j)$ (on a factorisé par 2)

Or k + j est un nombre entier, donc a + b est pair.

Propriété : la somme de deux nombres pairs, est un nombre pair.

Remarque : cette propriété a été démontrée avec 2 pour diviseur, mais elle est valable pour n'importe quel nombre entier, la démonstration est la même

Propriété (admise) : la somme d'un nombre pair et d'un nombre impair, est un nombre impair

3) Critères de divisibilité

Démonstration : on cherche à savoir pourquoi un nombre qui se termine par 0 ; 2 ; 4 ; 6 ou 8 est obligatoirement divisible par 2

Nous allons limiter la démonstration à un nombre entier à 4 chiffres : a, b, c et d

$abcd = a \times 1000 + b \times 100 + c \times 10 + d$

$abcd = abc\,0 + d = abc \times 10 + d$

$abc \times 10 = abc \times 5 \times 2$, donc c’est un nombre pair

Donc, si d (le chiffre des unités) est égale à 0;2;4;6 ou 8, on additionne deux chiffres pairs, le résultat est pair. (voir propriétés ci-dessus)
Sinon, on additionne un nombre pair et un nombre impair, le résultat est impair.

Propriétés : Un nombre entier est divisible
- par 2 lorsque son chiffre des unités est 0, 2, 4, 6, ou 8
- par 5 lorsque son chiffre des unités est 0 ou 5
- par 10 lorsque son chiffre des unités est 0

- par 3 lorsque la somme des ses chiffres est divisible par 3.
- par 9 lorsque la somme des ses chiffres est divisible par 9.

- par 4 lorsque le nombre composé de ses deux derniers chiffres est divisible par 4

Exemples :

42 est un nombre divisible par 2 et 3, mais pas par 3,4, 5,9 ou 10

2025 est un nombre divisible par 3,5,9, mais pas par 2, 4 et 10

II - Nombres premiers

1) Définition

Définition :
Un nombre est dit premier lorsque il admet exactement deux diviseurs : 1 et lui-même.

Liste des nombres premiers inférieurs à 30 : 2;3;5;7;11;13;17;19;23;29

Remarque :
- 1 n’est pas un nombre premier car il admet un seul diviseur : lui-même

2) Décomposition en produit de facteurs premiers

Propriété (admise en partie):
Tout nombre entier supérieur ou égal à 2 peut être décomposé en un produit de facteurs premiers. Cette décomposition est unique.

Exemple :

Décomposer 90, et 252 en produits de facteurs premiers

90 = 2 x 45
= 2 x 9 x 5
= 2 x 3 x 3 x 5

252 = 2 x 126
= 2 x 2 x 63
= 2 x 2 x 7 x 9
= 2 x 2 x 7 x 3 x 3

Méthode :

1. Regarder si le nombre peut être divisé par 2, si oui décomposer
2. Re-tester le résultat avec, décomposer autant de fois que nécessaire.
3. Recommencer en divisant par 3
4. Recommencer en divisant par 5
5. …

Remarques :

- Peu importe la décomposition de départ, on obtient toujours le même résultat, à l'ordre prêt. Ainsi, il est utile, à la fin de trier les différents facteurs à la fin.
- Inutile de tester avec 4, car 4 = 2 x 2, ce cas a donc déjà été testé. Il suffit de ne tester que des diviseurs premiers.

3) Application : trouver le plus grand diviseur commun à deux nombres

Définition : On appelle PGCD de deux nombres le plus grand diviseur commun de ces deux nombres.

Exemple : Décomposer 90 et 75 en produit de facteurs premiers, et en déduire le PGCD de ces deux nombres.

90 = 2 x 3 x 3 x 5
75 = 3 x 5 x 5

Les facteurs communs sont 3 et 5, donc le PGCD de 90 et de 75 est égal à $3\times5=15$.

4) Application : simplifier une fraction

Pour décomposer une fraction, on peut décomposer le dénominateur et le numérateur, puis éliminer les facteurs communs.

Exemples: Simplifier $\frac{42}{50}$ $\frac{42}{50}=\frac{3\times2\times7}{2\times5\times5}=\frac{3\times7}{5\times5}=\frac{21}{25}$	1- Décomposer le numérateur en produit de facteurs premiers 2- De même pour le dénominateur 3- Ré-écrire la fraction avec les décompositions 4- Simplifier

On ne peut plus simplifier la fraction obtenue, on dit alors que la fraction obtenue est irréductible.

Simplifier $\frac{1260}{3204}$

1260 = 126 x 10
= 63 x 2 x 2 x 5
= 3 x 3 x 7 x 2 x 2 x 5

3204 = 2 x 1602
= 2 x 2 x 801
= 2 x 2 x 9 x 89
= 2 x 2 x 3 x 3 x 89

$$\frac{1260}{3204}=\frac{2\times2\times3\times3\times5\times7}{89\times3\times3\times2\times2}=\frac{5\times7}{89}=\frac{35}{89}$$

Que dois-je retenir ?

Connaissances	Je connais ma leçon	
Critères de divisibilité	Oui	Non
Liste des nombres premiers	Oui	Non
Définition (PGCD, nombre premier)	Oui	Non
Savoir-faire	Je sais faire	
Trouver les diviseurs d’un nombre	Oui	Non
Décomposer un nombre en produit de facteurs premiers	Oui	Non
Rendre une fraction irréductible	Oui	Non
Résoudre un problème avec des nombres premiers.	Oui	Non